Дәріс 9. Квадраттық формалар. Квадраттық формалардың

геометриялық қолданымдары (приложения)

Дәріс мазмұны: квадраттық формалар. Екінші ретті қисықтардың

теңдеулерін канондық түрге келтіру.

Дәріс мақсаты: Квадраттық формалардың геометриялық қолданымдары

Жазықтықтағы квадраттық формалар

Анықтама. x және y екі айнымалысының квадраттық формасы деп

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

екінші ретті біртекті көпмүше айтылады.

Квадраттық форманы матрицалық түрде жазу үшін, оны мына түрде жазамыз:

$$F(x,y)=(a_{11}x+a_{12}y)x+(a_{12}x+a_{22}y)y\,.$$

Сонда $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадраттық форманың матрицасы, ол әруақытта симметриялы. Белгілеу енгізейік: $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – x және y айнымалыларының баған-

Сонда $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадраттық форманың матрицасы, ол әруақытта симметриялы. Белгілеу енгізейік: $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – x және y айнымалыларының баған-
матрицасы, $X^*=(x\ y)$ – жол-матрицасы. Квадраттық форманы матрицалық түрін аламыз: $F(x,y)=X^*AX$.

R_2 кеңістігінде жаңа базис (жаңа координаттар жүйесін) таңдап алуға болады, онда квадраттық форма қарапайым түрде болады. Мысалға, xy көбейткіші бар мүшесі жоқ. T түрлендіруі Oxy жүйесін $O_1x_1y_1$ жүйесіне ауыстырады. Oxy жүйесінде квадраттық форма $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ түрінде болса, ал $O_1x_1y_1$ жүйесінде квадраттық форма $F(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2$ түрінде болады. Квадраттық форманың соңғы осы түрі канондық деп аталады. Айта кетелік, канондық түрдегі квадраттық форманың матрицасы

диагоналды түрде болады: $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Сондықтан квадраттық форманы канондық түрге келтіру осы квадраттық форманың матрицасын диагоналды түрге келтіруге соғады. Квадраттық форманың матрицасы әруақытта симметриялы болғандықтан, квадраттық форма әруақытта канондық түрге келтіріледі, себебі симметриялы матрица әруақытта диагоналды түрге келтіріледі. Сонымен қатар $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ симметриялы матрица және $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ диагоналды матрицасы $T^{-1}AT=D$ қатынасымен байланысты, мұндағы λ_1,λ_2 – A матрицасының меншікті мәндері.

T – T ортогональды түрлендіруінің матрицасы (яғни ортогональды матрица). Ол берілген базистен T түрлендіруінің меншікті векторларынан тұратын базиске ауысуын қамтамасыз етеді. Бұл түрлендіру A матрицасын диагоналды түрге келтіреді, сонымен қатар квадраттық форманы канондық түрге келтіреді.

T матрицасының бағаны T ($T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$) түрлендіруінің қалыптанған (нормаланған) меншікті векторларының координаталарынан тұрады. Бұл $\bar{e}_1^{\,0}=(t_{11},t_{21})$ және $\bar{e}_2^{\,0}=(t_{12},t_{22})$ меншікті векторлары базис құрайды, осы базисте квадраттық форманың матрицасы диагоналды түрде болады, ал квадраттық форма канондық түрде болады. Егер $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ және $X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ – x векторының сәйкес «ескі» және «жаңа» базистердегі баған координаттары болса, онда $X=T\cdot X'$ – координаттардың «жаңа» базиске ауысу формуласы (матрицалық түрде). Координаттық формада бұл формулалар мына түрде болады $\begin{cases} x=t_{11}x_1+t_{12}y_1 \\ y=t_{21}x_1+t_{22}y_1 \end{cases}$.

Мысал 2.4.1 - $F(x,y)=4x^2+24xy+11y^2$ квадраттық форманы канондық түрге келтіретін ортогоналды түрлендіруді табу керек. Осы канондық түрді жазу керек.

Шешуі: $A=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ - квадраттық форманың матрицасы. Сипаттаушы (характеристикалық) көпмүшені құрып, оның түбірлерін табамыз:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix}=\boldsymbol{\lambda^2-15\lambda-100=0}$, $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$.

Сипаттаушы көпмүшенің түбірлері A матрицасының меншікті мәндері болып табылады. Сонымен, жаңа базисте квадраттық форма канондық түрге келтірілді $F(x_1,y_1)=\mathbf{20}x_1^2-\mathbf{5}y_1^2$, оның матрицасы диагоналды $D=\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Квадраттық форма канондық түрге келтірілетін базисті табайық, яғни $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$ меншікті мәндерге сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті векторларды табу керек.

а) $\lambda_1=20$: $\begin{cases} -16x_1+12x_2=0 \\ 12x_1-9x_2=0 \end{cases}$, жүйенің матрицасының рангы 1 болғандықтан, жүйе бір теңдеуге эквивалентті, ол теңдеуден $x_2=\frac{4}{3}x_1$ болатындығын көреміз. Егер $x_1=3c$, онда $x_2=4c$ және $X=(3c,4c)$ - жүйенің жалпы шешімі, $\lambda_1=20$-ға сәйкес келетін меншікті векторлардың жиыны. c=1 болсын, онда

канондық түрде болады. Егер $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ және $X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ – x векторының сәйкес «ескі» және «жаңа» базистердегі баған координаттары болса, онда $X=T\cdot X'$ – координаттардың «жаңа» базиске ауысу формуласы (матрицалық түрде). Координаттық формада бұл формулалар мына түрде болады $\begin{cases} x=t_{11}x_1+t_{12}y_1 \\ y=t_{21}x_1+t_{22}y_1 \end{cases}$.

Мысал 2.4.1 - $F(x,y)=4x^2+24xy+11y^2$ квадраттық форманы канондық түрге келтіретін ортогоналды түрлендіруді табу керек. Осы канондық түрді жазу керек.

Шешуі: $A=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ - квадраттық форманың матрицасы. Сипаттаушы (характеристикалық) көпмүшені құрып, оның түбірлерін табамыз:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix}=\boldsymbol{\lambda^2-15\lambda-100=0}$, $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$.

Сипаттаушы көпмүшенің түбірлері A матрицасының меншікті мәндері болып табылады. Сонымен, жаңа базисте квадраттық форма канондық түрге келтірілді $F(x_1,y_1)=\mathbf{20}x_1^2-\mathbf{5}y_1^2$, оның матрицасы диагоналды $D=\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Квадраттық форма канондық түрге келтірілетін базисті табайық, яғни $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$ меншікті мәндерге сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті векторларды табу керек.

а) $\lambda_1=20$: $\begin{cases} -16x_1+12x_2=0 \\ 12x_1-9x_2=0 \end{cases}$, жүйенің матрицасының рангы 1 болғандықтан, жүйе бір теңдеуге эквивалентті, ол теңдеуден $x_2=\frac{4}{3}x_1$ болатындығын көреміз. Егер $x_1=3c$, онда $x_2=4c$ және $X=(3c,4c)$ - жүйенің жалпы шешімі, $\lambda_1=20$-ға сәйкес келетін меншікті векторлардың жиыны. c=1 болсын, онда

канондық түрде болады. Егер $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ және $X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ – x векторының сәйкес «ескі» және «жаңа» базистердегі баған координаттары болса, онда $X=T\cdot X'$ – координаттардың «жаңа» базиске ауысу формуласы (матрицалық түрде). Координаттық формада бұл формулалар мына түрде болады $\begin{cases} x=t_{11}x_1+t_{12}y_1 \\ y=t_{21}x_1+t_{22}y_1 \end{cases}$.

Мысал 2.4.1 - $F(x,y)=4x^2+24xy+11y^2$ квадраттық форманы канондық түрге келтіретін ортогоналды түрлендіруді табу керек. Осы канондық түрді жазу керек.

Шешуі: $A=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ - квадраттық форманың матрицасы. Сипаттаушы (характеристикалық) көпмүшені құрып, оның түбірлерін табамыз:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix}=\boldsymbol{\lambda^2-15\lambda-100=0}$, $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$.

Сипаттаушы көпмүшенің түбірлері A матрицасының меншікті мәндері болып табылады. Сонымен, жаңа базисте квадраттық форма канондық түрге келтірілді $F(x_1,y_1)=\mathbf{20}x_1^2-\mathbf{5}y_1^2$, оның матрицасы диагоналды $D=\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Квадраттық форма канондық түрге келтірілетін базисті табайық, яғни $\lambda_1=20,\ \lambda_2=-5$ меншікті мәндерге сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті векторларды табу керек.

а) $\lambda_1=20$: $\begin{cases} -16x_1+12x_2=0 \\ 12x_1-9x_2=0 \end{cases}$, жүйенің матрицасының рангы 1 болғандықтан, жүйе бір теңдеуге эквивалентті, ол теңдеуден $x_2=\frac{4}{3}x_1$ болатындығын көреміз. Егер $x_1=3c$, онда $x_2=4c$ және $X=(3c,4c)$ - жүйенің жалпы шешімі, $\lambda_1=20$-ға сәйкес келетін меншікті векторлардың жиыны. c=1 болсын, онда

$E_1=(3,4)$, бұл векторды қалыпты түрге келтірейік: $|E_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $E_1^0=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

б) $\lambda_2=-5$: $\begin{cases} 9x_1+12x_2=0 \\ 12x_1+16x_2=0 \end{cases}$, дәл сол сияқты екінші нормаланған вектор аламыз $E_2^0=\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Сонымен, E_1^0, E_2^0 – квадраттық форманың канондық түрге келетін базис, $T=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ – ортогоналды түрлендірудің матрицасы, ол квадраттық форманы канондық түрге келтіреді. $X=T\cdot X'\to$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\to\begin{cases} x=\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}y_1 \\ y=\frac{4}{5}x_1+\frac{3}{5}y_1 \end{cases}$ – жаңа базиске ауысқанда координаттарды түрлендіретін формулалар.